2°/ Montrer que $\forall x > 0$, $\ln x \leq x - 1$. (On étudiera une fonction convenablement choisie).

3°/ En déduire que $\forall x > 0$, $e^x - \ln x \geq 2$.

B) Soit φ la fonction définie par : $\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{x}{e^x - \ln x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$

1°/ Montrer que $D_\varphi = \mathbf{R}_+$.

2°/ Montrer que φ est continue, dérivable sur $\mathbf{R}_+$.

3°/ Soit h : $\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$: $x \mapsto e^x(1-x) - \text{Log}\, x + 1$

a) Etudier les variations de h.

b) Montrer qu'il existe un seul réel $\alpha > 0$ solution de l'équation : (E) : $h(x) = 0$. Vérifier que $1 < \alpha < 2$.

c) En déduire le signe de $h(x)$.

4°/ Etudier ainsi les variations de φ.

Exercice 13 :

Soient $f(x) = x^2 e^{2x}$ et $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$.

1°/ Déterminer a, b et c pour que g soit une primitive de f.

2°/ En déduire la primitive F de f qui s'annule en 0.

Exercice 14 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$

1°/ Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbf{R}$, on a :

$$f(x) = a + \frac{be^x}{e^x + 1}$$

2°/ Calculer ainsi l'intégrale $I = \int_0^{\ln 2} f(x)dx$.

Exercice 15 :

Soit F définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $F(x) = \int_0^x \sqrt{t}.e^{-t}\,dt$

(on ne demande pas le calcul de $F(x)$)